**Descrierea soluţiei maxmaxmax 100 puncte**

**(Autori: Prof. Szabó Zoltan ISJ Mureş**

**Stud. Oprică Dragoş – Universitatea Bucureşti )**

Pentru a calcula numărul şirurilor de **n** elemente cu valori din mulţimea {**x, x+1, ... , y**} ce admit un număr maxim de subşiruri strict descrescătoare de lungime maximă, vom avea în vedere următoarele cunoştinţe:

1. pe mulţimea {**x, x+1, ... , y**} există tot atâtea şiruri care admit un număr maxim de subşiruri strict **descrescătoare** de lungime maximă câte admit un număr maxim de subşiruri strict **crescătoare** de lungime maximă.
2. un şir neordonat va conţine mai puţine subşiruri de lungime maximă decât un şir **ordonat pe trepte**.

Vom spune că un şir este **ordonat pe trepte,** dacă este un şir strict descrescător de secvenţe crescătoare.

Exemplu: şirul (10, 10, 13, 7, 7, 7, 8, 4, 4, 5, 6, 6, 1, 2) conţine patru trepte, şi anume:

treapta 1: (10,10,13) cu cardinalul 3

treapta 2: (7, 7, 7, 8) cu caradinalul 4

treapta 3: (4, 4, 5, 6, 6) cu cardinalul 5

treapta 4: (1,2) cu cardinalul 2

Făcând produsul cartezian al acestor mulţimi, obţinem câte un subşir strict descrescător de lungime maximă, Vom avea 3 \* 4 \* 5 \* 2=120 de soluţii distincte.

Suma cardinalelor este **n**.

1. pentru a maximiza acest număr trebuie să avem o partiţie optimă a numărului n.

Adică ne interesează Πcu ∑xi=n.

Astfel avem 3 cazuri, în funcţie de valoarea lui n:

1. dacă n=3k,

atunci cea mai bună partiţie este (3, 3, ... ,3) şi ne oferă maximul 3 \* 3 \* ... \* 3= 3k

1. dacă n=3k+1, atunci avem două partiţii optime, şi anume:

(4, 3, 3, ... , 3) cu cardinalul k

(2, 2, 3, 3, ... , 3) cu cardinalul k+1

ambele partiţii au produsul 4 \* 3k-1

1. dacă n=3k+2,

atunci cea mai bună partiţie este (2, 3, 3, ... ,3) şi are cardinalul k+1, şi produsul 2\*3k

Mulţimea valorilor {**x, x+1, ... , y**} are cardinalul**y-x+1.**

Scopul nostru este să calculăm numărul **şirurilor treaptă** cu cardinalul secvenţelor încadrându-se în cazul corespunzător.

1. Există şi un al patrulea caz: dacă valorile posibile disponibile **x, x+1, ... , y** sunt mai puţine decât numărul treptelor la cazurile a, b şi c atunci, cardinalul submultimilor trebuie sa fie cat mai omogen, adica diferenta oricaror doua numere cardinale sa fie mai mică sau egală cu 1.
2. Deci ne interesează câte şiruri ordonate pe **t** trepte avem cu proprietăţile de mai sus?

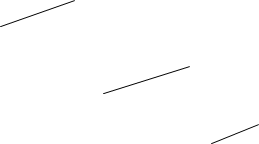
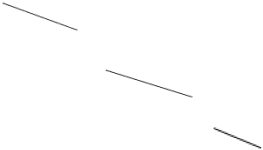
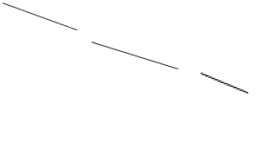
  

fig. a. fig. b. fig. c.

sir pe trepte sir descrescator din care am eliminat treptele

Avem tot atâtea şiruri descrescătoare pe o mulţime, câte şiruri crescătoare, deci numărul şirurilor ordonate pe **t** trepte este egal cu numărul şirurilor descrescătoare ce au cel puţin **t valori distincte** pe mulţimea{**x, x+1, ... , y**}.

Adică numărul şirurilor treaptă este egal cu numărul şirurilor descrescătoare, cu cel puţin **t** valori distincte (figurile a şi b).

Cum două trepte învecinate trebuie să aibă o diferenţă de cel puţin 1. Dacă modificăm elementele şirului prin adăugarea pe trepte, începând cu a doua traptă, valorile **1, 2, ... , t-1**, vom obţine un şir descrescător pe intervalul {**x+t-1, ... , y**} (fig c.)

1. Problema se reduce la următoarea problemă: câte şiruri **descrescătoare** cu **n** elemente avem pe mulţimea {**x+t-1, ... , y**}?

Rezultatul este egal cu numărul şirurilor **crescătoare** pe intervalul**{0, ... , y-x-t+1},** sau, mai simplu, pe un interval {0, ... , p} , cu p=y-x-t+1.

Numărul şirurilor crescătoare este egal cu .

Revenind la problemă, cele 4 cazuri au următoarele soluţii:

1. n=3k , n/3<=y-x+1

n/3 grupe, deci numărul de trepte (spaţii dintre grupe) t=n/3-1

rezultatul este

1. n=3k+2, (n+1)/3<=y-x+1 ,

avem (n-2)/3+1 grupe, deci numărul de trepte t=(n-2)/3

în acest caz avem o secvenţă de lungime 2, ce poate avea (n+1)/3 poziţii distincte în şir.

rezultatul este

1. n=3k+1, (n-1)/3<= y-x

avem două cazuri:

1. 4,3,3, ... 3 – avem (n-1)/3 grupe dec inumărul de trepte **t**=(n-1)/3-1

în acest caz avem o secvenţă de lungime 4, ce poate avea **t** pozitii distincte în şir.

1. 2,2,3,3, ... ,3 – avem (n-1)/3+1 grupe, deci numărul de trepte este **t+1**

în acest caz avem două secvenţe de lungime 2, ce pot fi pozitionate în şir în (t+1)\*t/2 moduri.

rezultatul cumulativ este

+

1. celelalte cazuri:

fiecare grupă este un şir constant, ce permite combinarea rezultatului astfel: